

Cosinus et Sinus intégraux

Domaine de définition général:

Ces fonctions sont définies pour $x \geq 0$

Forme intégrale:

Cosinus intégral:

$$\text{Ci } x = - \int_x^\infty \frac{\cos u}{u} du = \int_\infty^x \frac{\cos u}{u} du \quad (1)$$

Cosinus intégral modifié:

$$\text{Cim } x = \int_0^x \frac{1 - \cos u}{u} du \quad (2)$$

Sinus intégral:

$$\text{Si } x = \int_0^x \frac{\sin u}{u} du \quad (3)$$

Forme récurrente:

Cosinus intégral modifié:

$$\text{Cim } x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k}}{(2k)(2k)!} \quad (4)$$

Sinus intégral:

$$\text{Si } x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!} \quad (5)$$

Cosinus intégral:

$$\text{Ci } x = C + \ln x - \text{Cim } x \quad (6)$$

où C est la constante d'Euler: $C = 0,5772156649\dots$

Forme polynomiale asymptotique:

Domaine de définition spécifique:

La forme polynomiale est définie pour $x \geq 6$

On pose p tel que:

$$p = \frac{38,102495 + 335,67732x^2 + 265,187033x^4 + 38,027264x^6 + x^8}{157,105423x + 570,23628x^3 + 322,624911x^5 + 40,021433x^7 + x^9} \quad (7)$$

et q tel que:

$$q = \frac{21,821889 + 352,018498x^2 + 302,757865x^4 + 42,252855x^6 + x^8}{449,690326x^2 + 1114,978885x^4 + 482,485984x^6 + 48,196927x^8 + x^{10}} \quad (8)$$

Cosinus intégral:

$$\text{Ci } x = p \sin x - q \cos x \quad (9)$$

Cosinus intégral modifié:

$$\text{Cim } x = 0,5772156649 + \ln x - p \sin x + q \cos x \quad (10)$$

Sinus intégral:

$$\text{Si } x = \frac{\pi}{2} - p \cos x - q \sin x \quad (11)$$

Calcul numérique sur PC

La forme intégrale n'est pas adaptée au calcul numérique.

Ici, la forme récurrente donne des résultats corrects pour des valeurs de x comprises entre 0 et environ 6 à 2π . Pour des valeurs plus élevées, les termes récurrents convergent très lentement et on atteint vite la limite de précision des langages de programmation. Pour x supérieur à 6 ou 2π , on utilise la forme polynomiale asymptotique, dont les algorithmes "étudiés pour" sont "directs".

Algorithmes de calcul

Les algorithmes ci-dessous ont été écrits en langage "Visual Basic".

Ils peuvent être implantés tels quels dans un module "Visual Basic" en faisant un simple "copier-coller". Ils donnent des résultats conformes à ceux publiés dans les tables.

Fonction "Sinus intégral":

```
Function Si(x)
'Calcul du Sinus Intégral (Si)

Dim n As Long

x2 = x * x
Select Case x
Case Is < 6          'Forme récurrente

    Si = 0
    TrmRec = x
    n = 3
    While Abs(TrmRec) >= 0.000005
        Si = Si + TrmRec
        TrmRec = -TrmRec * x2 * (n - 2) / (n - 1) / n / n
        n = n + 2
    Wend

Case Is >= 6        'Forme polynomiale asymptotique

    pnum = (((x2 + 38.027264) * x2 + 265.187033) * x2 + 335.67732) * x2 + 38.102495
    pden = (((x2 + 40.021433) * x2 + 322.624911) * x2 + 570.23628) * x2 + 157.105423) * x
    p = pnum / pden

    qnum = (((x2 + 42.252855) * x2 + 302.757865) * x2 + 352.018498) * x2 + 21.821899
    qden = (((x2 + 48.196927) * x2 + 482.485984) * x2 + 1114.978885) * x2 + 449.690326) * x2
    q = qnum / qden

    Si = 1.570796326794895 - p * Cos(x) - q * Sin(x)

End Select

End Function
```

Fonction "Cosinus intégral":

```
Function Ci(x)
'Calcul du Cosinus Intégral (Ci)

Dim n As Long

x2 = x * x
Select Case x
Case Is = 0          'Contournement de la singularité:
    Ci = -2 ^ 127    'Ci = "-infini"
Case Is < 6          'Forme récurrente

    Cim = 0
    TrmRec = -x2 / 4
    n = 4
    While Abs(TrmRec) >= 0.000005
        Cim = Cim - TrmRec
        TrmRec = -TrmRec * x2 * (n - 2) / (n - 1) / n / n
        n = n + 2
    Wend

    Ci = 0.5772156649 + Log(x) - Cim

Case Is >= 6        'Forme polynomiale asymptotique

    pnum = (((x2 + 38.027264) * x2 + 265.187033) * x2 + 335.67732) * x2 + 38.102495
    pden = (((x2 + 40.021433) * x2 + 322.624911) * x2 + 570.23628) * x2 + 157.105423) * x
    p = pnum / pden

    qnum = (((x2 + 42.252855) * x2 + 302.757865) * x2 + 352.018498) * x2 + 21.821899
    qden = (((x2 + 48.196927) * x2 + 482.485984) * x2 + 1114.978885) * x2 + 449.690326) * x2
    q = qnum / qden

    Ci = p * Sin(x) - q * Cos(x)

End Select

End Function
```

Fonction "Cosinus intégral modifié":

```
Function Cim(x)
'Calcul du Cosinus Intégral Modifié (Cim).

Dim n As Long

x2 = x * x
Select Case x
Case Is < 6          'Forme récurrente

    Cim = 0
    TrmRec = -x2 / 4
    n = 4
    While Abs(TrmRec) >= 0.000005
        Cim = Cim - TrmRec
        TrmRec = -TrmRec * x2 * (n - 2) / (n - 1) / n / n
        n = n + 2
    Wend

Case Is >= 6        'Forme polynomiale asymptotique

    pnum = (((x2 + 38.027264) * x2 + 265.187033) * x2 + 335.67732) * x2 + 38.102495
    pden = (((x2 + 40.021433) * x2 + 322.624911) * x2 + 570.23628) * x2 + 157.105423 * x2
    p = pnum / pden

    qnum = (((x2 + 42.252855) * x2 + 302.757865) * x2 + 352.018498) * x2 + 21.821899
    qden = (((x2 + 48.196927) * x2 + 482.485984) * x2 + 1114.978885) * x2 + 449.690326 * x2
    q = qnum / qden

    Cim = 0.5772156649 + Log(x) - p * Sin(x) + q * Cos(x)

End Select

End Function
```

Tables

La table 1 donne les valeurs des Sinus Intégraux, Cosinus Intégraux et Cosinus Intégraux Modifiés pour des valeurs de x allant de 0,1 à 20 au pas de 0,1.

La table 2 donne les valeurs des Cosinus Intégraux pour des valeurs de x allant de 0,001 à 0,1 au pas de 0,001.

La table 3 donne les valeurs des Cosinus Intégraux pour des valeurs de x allant de 0,0001 à 0,001 au pas de 0,0001.

Cas particuliers:

$$Si(0) = 0$$

$$Ci(0) = -\infty$$

$$Cim(0) = 0$$

$$Si(2\pi) = 1,4181520 \quad Ci(2\pi) = -0,0225629 \quad Cim(2\pi) = 2,4376556$$

Table 1

x	Si(x)	Ci(x)	Cim(x)	x	Si(x)	Ci(x)	Cim(x)
0,1	0,0999444	-1,7278694	0,0025000	5,1	1,5312526	-0,1834790	2,3899352
0,2	0,1995556	-1,0422056	0,0099833	5,2	1,5136700	-0,1752577	2,4011320
0,3	0,2985000	-0,6491728	0,0224156	5,3	1,4973136	-0,1655056	2,4104281
0,4	0,3964615	-0,3788084	0,0397333	5,4	1,4822980	-0,1543854	2,4180000
0,5	0,4931076	-0,1777805	0,0618490	5,5	1,4687210	-0,1420522	2,4240160
0,6	0,5881296	-0,0222708	0,0886608	5,6	1,4566638	-0,1286706	2,4286529
0,7	0,6812246	0,1005145	0,1200262	5,7	1,4461979	-0,1144091	2,4320910
0,8	0,7720957	0,1982781	0,1557940	5,8	1,4373598	-0,0994383	2,4345119
0,9	0,8604706	0,2760665	0,1957886	5,9	1,4301852	-0,0839292	2,4360972
1,0	0,9460828	0,3374009	0,2398148	6,0	1,4246886	-0,0680595	2,4370347
1,1	1,0286845	0,3848734	0,2876524	6,1	1,4208682	-0,0519848	2,4374892
1,2	1,1080456	0,4204594	0,3390779	6,2	1,4187074	-0,0358752	2,4376402
1,3	1,1839548	0,4457389	0,3938410	6,3	1,4181744	-0,0198904	2,4376557
1,4	1,2562268	0,4620074	0,4516805	6,4	1,4192232	-0,0041835	2,4376972
1,5	1,3246837	0,4703579	0,5123229	6,5	1,4217943	0,0110995	2,4379184
1,6	1,3891809	0,4717355	0,5754838	6,6	1,4258160	0,0258212	2,4384642
1,7	1,4495931	0,4669683	0,6408757	6,7	1,4312051	0,0398535	2,4394696
1,8	1,5058182	0,4568109	0,7081914	6,8	1,4378680	0,0530789	2,4410594
1,9	1,5577779	0,4419400	0,7771296	6,9	1,4457018	0,0653906	2,4433465
2,0	1,6054175	0,4229801	0,8473827	7,0	1,4545959	0,0766937	2,4464321
2,1	1,6486984	0,4005107	0,9186423	7,1	1,4644324	0,0869054	2,4504050
2,2	1,6876245	0,3750724	0,9906006	7,2	1,4750881	0,0959557	2,4553409
2,3	1,7222069	0,3471719	1,0629529	7,3	1,4864354	0,1037875	2,4613025
2,4	1,7524844	0,3172918	1,1353926	7,4	1,4983436	0,1103566	2,4683390
2,5	1,7785184	0,2858715	1,2076349	7,5	1,5106803	0,1156323	2,4764864
2,6	1,8003915	0,2533371	1,2793900	7,6	1,5233125	0,1195968	2,4857671
2,7	1,8182122	0,2200858	1,3503817	7,7	1,5361079	0,1222452	2,4961907
2,8	1,8320968	0,1864898	1,4203452	7,8	1,5489361	0,1235855	2,5077539
2,9	1,8421906	0,1528977	1,4890287	7,9	1,5616697	0,1236377	2,5204407
3,0	1,8486532	0,1196336	1,5561944	8,0	1,5741855	0,1224338	2,5342234
3,1	1,8516605	0,0869916	1,6216262	8,1	1,5863653	0,1200167	2,5490630
3,2	1,8514028	0,0552571	1,6851094	8,2	1,5980973	0,1164402	2,5649096
3,3	1,8480837	0,0246777	1,7464604	8,3	1,6092763	0,1117676	2,5817036
3,4	1,8419186	-0,0045190	1,8055101	8,4	1,6198055	0,1060714	2,5993760
3,5	1,8331251	-0,0321300	1,8621086	8,5	1,6295961	0,0994319	2,6178499
3,6	1,8219477	-0,0579766	1,9161262	8,6	1,6385687	0,0919369	2,6370410
3,7	1,8086210	-0,0819045	1,9674530	8,7	1,6466537	0,0836801	2,6568586
3,8	1,7933892	-0,1037779	2,0159947	8,8	1,6537914	0,0747605	2,6772068
3,9	1,7764996	-0,1234990	2,0616912	8,9	1,6599329	0,0652813	2,6979857
4,0	1,7582004	-0,1409811	2,1044911	9,0	1,6650396	0,0553485	2,7190918
4,1	1,7387395	-0,1561645	2,1443671	9,1	1,6690839	0,0450703	2,7404198
4,2	1,7183689	-0,1690118	2,1813120	9,2	1,6720492	0,0345559	2,7618632
4,3	1,6973203	-0,1795075	2,2153382	9,3	1,6739294	0,0239143	2,7833157
4,4	1,6758347	-0,1876571	2,2464773	9,4	1,6747292	0,0132534	2,8046719
4,5	1,6541415	-0,1934864	2,2747794	9,5	1,6744635	0,0026790	2,8258284
4,6	1,6324620	-0,1970474	2,3003194	9,6	1,6731572	-0,0077061	2,8466848
4,7	1,6110076	-0,1983918	2,3231700	9,7	1,6708449	-0,0178032	2,8671447
4,8	1,5899789	-0,1976044	2,3434360	9,8	1,6675701	-0,0275183	2,8871164
4,9	1,5695587	-0,1947811	2,3612319	9,9	1,6633846	-0,0367632	2,9065136
5,0	1,5499308	-0,1900316	2,3766852	10,0	1,6583482	-0,0454557	2,9252565

x	Si(x)	Ci(x)	Cim(x)	x	Si(x)	Ci(x)	Cim(x)
10,1	1,6525277	-0,0535210	2,9432721	15,1	1,6222564	0,0410243	3,2508861
10,2	1,6459960	-0,0608916	2,9604949	15,2	1,6257501	0,0354272	3,2630839
10,3	1,6388318	-0,0675080	2,9768676	15,3	1,6286484	0,0295481	3,2755204
10,4	1,6311180	-0,0733195	2,9923409	15,4	1,6309304	0,0234490	3,2881342
10,5	1,6229416	-0,0782838	3,0068748	15,5	1,6325813	0,0171933	3,3008624
10,6	1,6143922	-0,0823680	3,0204377	15,6	1,6335929	0,0108451	3,3136415
10,7	1,6055615	-0,0855482	3,0330076	15,7	1,6339633	0,0044687	3,3264077
10,8	1,5965421	-0,0878095	3,0445713	15,8	1,6336970	-0,0018724	3,3390980
10,9	1,5874268	-0,0891468	3,0551252	15,9	1,6328046	-0,0081155	3,3516503
11,0	1,5783076	-0,0895634	3,0646744	16,0	1,6313028	-0,0142000	3,3640044
11,1	1,5692748	-0,0890721	3,0732329	16,1	1,6292142	-0,0200673	3,3761023
11,2	1,5604164	-0,0876939	3,0808234	16,2	1,6265668	-0,0256620	3,3878889
11,3	1,5518170	-0,0854583	3,0874767	16,3	1,6233938	-0,0309318	3,3993126
11,4	1,5435571	-0,0824025	3,0932316	16,4	1,6197330	-0,0358284	3,4103254
11,5	1,5357127	-0,0785711	3,0981338	16,5	1,6156267	-0,0403076	3,4208836
11,6	1,5283543	-0,0740155	3,1022363	16,6	1,6111212	-0,0443300	3,4309484
11,7	1,5215463	-0,0687933	3,1055978	16,7	1,6062660	-0,0478613	3,4404857
11,8	1,5153469	-0,0629675	3,1082826	16,8	1,6011134	-0,0508720	3,4494666
11,9	1,5098073	-0,0566060	3,1103600	16,9	1,5957182	-0,0533387	3,4578679
12,0	1,5049713	-0,0497808	3,1119031	17,0	1,5901368	-0,0552430	3,4656720
12,1	1,5008750	-0,0425673	3,1129884	17,1	1,5844269	-0,0565728	3,4728669
12,2	1,4975470	-0,0350434	3,1136950	17,2	1,5786467	-0,0573215	3,4794466
12,3	1,4950077	-0,0272886	3,1141035	17,3	1,5728543	-0,0574885	3,4854106
12,4	1,4932695	-0,0193835	3,1142957	17,4	1,5671076	-0,0570787	3,4907646
12,5	1,4923367	-0,0114090	3,1143533	17,5	1,5614630	-0,0561028	3,4955194
12,6	1,4922057	-0,0034452	3,1143577	17,6	1,5559754	-0,0545771	3,4996917
12,7	1,4928652	0,0044292	3,1143885	17,7	1,5506977	-0,0525228	3,5033032
12,8	1,4942962	0,0121374	3,1145234	17,8	1,5456799	-0,0499664	3,5063806
12,9	1,4964725	0,0196058	3,1148372	17,9	1,5409688	-0,0469389	3,5089553
13,0	1,4993611	0,0267638	3,1154012	18,0	1,5366080	-0,0434756	3,5110630
13,1	1,5029223	0,0335453	3,1162826	18,1	1,5326369	-0,0396157	3,5127433
13,2	1,5071107	0,0398888	3,1175437	18,2	1,5290906	-0,0354020	3,5140393
13,3	1,5118752	0,0457380	3,1192417	18,3	1,5259997	-0,0308803	3,5149970
13,4	1,5171600	0,0510422	3,1214281	18,4	1,5233900	-0,0260987	3,5156650
13,5	1,5229049	0,0557571	3,1241483	18,5	1,5212821	-0,0211077	3,5160941
13,6	1,5290462	0,0598445	3,1274410	18,6	1,5196917	-0,0159591	3,5163364
13,7	1,5355170	0,0632730	3,1313385	18,7	1,5186290	-0,0107058	3,5164450
13,8	1,5422485	0,0660183	3,1358660	18,8	1,5180988	-0,0054010	3,5164736
13,9	1,5491702	0,0680630	3,1410416	18,9	1,5181009	-0,0000981	3,5164757
14,0	1,5562105	0,0693968	3,1468762	19,0	1,5186296	0,0051502	3,5165044
14,1	1,5632980	0,0700166	3,1533739	19,1	1,5196741	0,0102924	3,5166116
14,2	1,5703617	0,0699264	3,1605312	19,2	1,5212186	0,0152785	3,5168475
14,3	1,5773318	0,0691371	3,1683381	19,3	1,5232427	0,0200604	3,5172603
14,4	1,5841406	0,0676661	3,1767778	19,4	1,5257211	0,0245929	3,5178958
14,5	1,5907226	0,0655376	3,1858267	19,5	1,5286247	0,0288334	3,5187967
14,6	1,5970157	0,0627817	3,1954555	19,6	1,5319201	0,0327428	3,5200025
14,7	1,6029613	0,0594343	3,2056289	19,7	1,5355707	0,0362854	3,5215489
14,8	1,6085052	0,0555367	3,2163062	19,8	1,5395366	0,0394300	3,5234676
14,9	1,6135978	0,0511348	3,2274420	19,9	1,5437751	0,0421491	3,5257863
15,0	1,6181945	0,0462793	3,2389865	20,0	1,5482414	0,0444201	3,5285279

Table 2

x	$Ci(x)$
0,001	-6,3305396
0,002	-5,6373924
0,003	-5,2319273
0,004	-4,9442453
0,005	-4,7211080
0,006	-4,5387891
0,007	-4,3846417
0,008	-4,2511141
0,009	-4,1333353
0,010	-4,0279795

Table 3

x	$Ci(x)$
0,0001	-8,6331247
0,0002	-7,9399775
0,0003	-7,5345124
0,0004	-7,2468303
0,0005	-7,0236868
0,0006	-6,8413652
0,0007	-6,6872146
0,0008	-6,5536832
0,0009	-6,4359001
0,0010	-6,3305396